TD 16 : Convexité Indications

Exercices théoriques sur la convexité

1 ★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.

1) Montrer que $f+g$ est convexe.
2) Montrer que si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
3) Dans le cas général, peut-on affirmer que $g \circ f$ est convexe ?

Utiliser la définition.

2 ★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) On suppose f dérivable. Montrer que si f admet un minimum local en a, alors ce minimum est global.
2) Même question sans l'hypothèse "f dérivable".
3) Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?

1) Comme f est dérivable, on peut utiliser toutes les propriétés spécifiques aux fonctions convexes dérivables. L'une d'elle est particulièrement adaptée puisque f admet un extremum local en a...
2) Raisonner par l'absurde (en faisant un dessin pour se donner une idée d'où viendrait une contradiction). On peut aussi utiliser l'inégalité des pentes.
3) Un dessin permet d'en déduire ce qu'il faut montrer pour f. Ensuite, raisonner par l'absurde, ou via l'inégalité des pentes !

3 ★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.

Raisonner par l'absurde en supposant f non constante. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. Utiliser ensuite une propriété que vérifie une fonction convexe...

Inégalités de convexité

4 ★★☆ En utilisant un argument de convexité, montrer les assertions suivantes :

$$\forall x > 0 \qquad \ln(x) \leq x - 1$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Remarquer que ce sont des inégalités qui font intervenir des fonctions affines. Faire le lien avec la méthode du cours.

5 ★★☆ Montrer que $x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $\left]1, +\infty\right[$. En déduire :

$$\forall a, b > 1 \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$

Utiliser la définition (ou encore Jensen avec 2 points).

6 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Des inégalités qui font intervenir n points $x_1, \cdots, x_n$? Il faut utiliser Jensen ! Suivre la méthode du poly.

7 ★★☆ Soit $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) La fonction f est-elle convexe ou concave ?
2) En déduire que pour tous $x_1, \cdots, x_n > 0$, on a :

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)}$$

3) En déduire que pour tous $x_1, \cdots, x_n > 0$ et $y_1, \cdots, y_n > 0$, on a :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k)}$$

Pour la question 2, si on part de l'inégalité de Jensen pour f appliquée à $x_1, \cdots, x_n$, on tombe sur un os. Il faut peut-être l'appliquer à autre chose que $x_1, \cdots, x_n$, mais à ce stade on ne peut pas le voir.

Repartir de l'inégalité qu'on veut montrer et appliquer ln pour transformer l'un des produits en somme. On obtient alors un terme de la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k)$, ce qui n'est pas $f(x_k)$ mais plutôt $f(\ln x_k)$!

8 ★★★ Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1) Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

2) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}$$

1) Appliquer la fonction ln pour transformer le produit *ab* en somme.
2) Appliquer encore le ln ! Puis utiliser le résultat du 1.